Mengen: $(A\cup B)\cap X = (A\cap X)\cup(B\cap X)$; $(A\cap B)\cup X = (A\cup X)\cap(B\cup X)$ $\overline{A\cap B} = \bar A \cup \bar B$ $\overline{A\cup B} = \bar A\cap\bar B$

Injektivität: $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (linkseindeutig) f inj. ⇐ f streng monoton

Surjektivität: $f(X)=Y$; $\forall y\in Y\ \exists x\in X: f(x)=y$ (kompletter Bildbereich)

$\overline{\forall x\in X, A(x)} = \exists x\in X\ \bar A(x)$

$\overline{\exists x\in X, A(x)} = \forall x\in X, \bar A(x)$

Algebraische Grundbegriffe: Gruppe: Menge G mit assoziativer Verknüpfung, Neutralelement und inverses Element

Ist Gruppe kommutativ → abelsche Gruppe

Ring: mit + eine abelsche Gruppe, neutrales Element; Multiplikation assoziativ, neutrales Element 1; $a\cdot b = b\cdot a$ und $a\cdot(b+c) = ab + ac$;

Inverses bzgl. $\cdot$: Körper

Folgen: Konvergenz: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: |a_n - a|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$

$\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = b \Rightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = a\pm b$

Cauchyfolge: $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: |a_n - a_m|<\varepsilon\ \forall n,m\geq n_0$

Grenzwerte berechnen:
- gibt es ein Häufungspunkt → a_n konvergent
- beschränkt + monoton → konvergent
- $a_n, b_n \to a$; $a_n \leq x_n \leq b_n$ für $n>n_0$ ⇒ $x_n\to a$
- jede CF ist konvergent (⇍ nicht umgekehrt)
- Cauchy-Kriterium (2 aufeinanderfolgende Glieder betrachten)
- bei Brüchen: kürzen mit größter Potenz im Nenner

Supremum = kleinste obere Schranke

Infimum = größte untere Schranke

a_n sei monoton wachsend/fallend und nach oben/unten beschränkt ⇒ $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup/\inf$

Rechenregeln für Grenzwerte: $a_n\to a$, $b_n\to b$

$a_n \pm b_n \to a\pm b$ $\qquad a_n^{b_n}\to a^b$ $\quad a_n>0, a>0$

$\frac{a_n}{b_n}\to\frac{a}{b}$ $\quad b_n\neq 0 \neq b$ $\qquad a_n^c \to a^c$ $\quad a_n>0, a>0$, $c\in\mathbb{R}$

Reihen: konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Konvergenzkriterien:
- notwend. Kriterium: a_n muss Nullfolge sein
- Leibniz-Kriterium: alternierende Reihe ist konvergent, wenn a_n monotone Nullfolge ist
- Majoranten-Kriterium: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ist absolut konv., wenn $\exists\ \sum a_n$ konvergent mit $a_n>0$ und $|b_n|\leq a_n\ \forall k\in\mathbb{N}$
- Minoranten-Kriterium: $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ ist divergent, wenn $\exists\ \sum a_n$ divergent mit $a_n\leq x_n\ \forall k\in\mathbb{N}$
- Quotienten-Kriterium: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix} 1 \Rightarrow \begin{cases}\text{absolut konvergent}\\ \text{divergent}\end{cases}$
- Wurzel-Kriterium: $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|x_n|} \begin{Bmatrix}<\\>\end{Bmatrix} 1 \Rightarrow \begin{cases}\text{absolut konv.}\\ \text{divergent}\end{cases}$
- Verdichtungs-Kriterium: x_n sei monoton fallende Nullfolge; $\sum x_n$ und $\sum 2^k x_{2^k}$ beide konvergent/divergent
- Integral-Kriterium: $f(x)\geq 0$ und monoton fallend auf $[m,\infty]$ ⇒ $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$ konv. ⇔ $\int_m^{\infty} f(x)dx$ konvergiert
- Doppelreihen-Satz: konvergiert eine der 3 Reihen: $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}|a_{kn}|$, $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{kn}|$, $\sum_{d=2}^{\infty}\sum_{k+n=d}|a_{kn}|$, dann auch die anderen (gleicher Grenzwert)
- PBZ
- Cauchy-Produkt: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\cdot\sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} a_i\cdot b_{k-i}\right)$; a_k und b_k absolut konv. → $\sum c_k = a\cdot b$

Potenzreihen: $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $\quad a_k$ ... Koeffizient $\quad$ bzw. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$ mit x_0 ... Entwicklungspunkt

Konvergenzradius: (1) $\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ oder (falls nicht ex.): $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$

(2) $\frac{1}{r} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ $\quad$ (3) $r = \sup\{r\geq 0$: Folge $(|a_n|r^n)_{n\geq 0}$ ist beschränkt$\}$

Konvergenzbereich: (i) konvergiert nur im Entwicklungspunkt ($r=0$)

(ii) konvergiert $\forall x\in\mathbb{R}$ $(r=\infty)$

(iii) konvergiert $\forall x\in(|x_0|<r)$ und höchstens in den Randpunkten $x_0 \pm r$ (separat untersuchen)

Komplexe Zahlen: $z = x+iy$ $\quad \bar z = x - iy$

$|z| = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad z\cdot\bar z = |z|^2$

$z+\bar z = 2\,\mathrm{Re}(z)$ $\quad z-\bar z = 2\,\mathrm{Im}(z)\cdot i$

$\overline{z+w} = \bar z + \bar w$; $\overline{z\cdot w} = \bar z\cdot\bar w$

$|z\cdot w| = |z|\,|w|$

$|z\pm w| \leq |z| \pm |w|$ ... Δ-Ungleichung

$x = r\cdot\cos\varphi$; $y = r\cdot\sin\varphi$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \Leftrightarrow z = r\,e^{i\varphi}$

$z\cdot w = |z|\,|w|\cdot e^{i(\varphi_z+\varphi_w)}$

$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\cdot e^{i\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}}$ $\quad k = 0,1,\dots,n-1$

Komplexe Folgen: konvergent, wenn $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}: |z_n - z|<\varepsilon\ \forall n\geq n_0$ ⇒ $\lim_{n\to\infty} x_n = \mathrm{Re}(z)$; $\lim_{n\to\infty} y_n = \mathrm{Im}(z)$

Stetigkeit: Def: (1) $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: |f(x_0) - f(x)|<\varepsilon$ für $|x_0 - x|<\delta$

(2) f genau dann stetig, wenn für jede Folge $x_n\in M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(x_0)$

- Verkettung stetiger Fkt. sind stetig
- Polynome (auch rationale) sind stetig
- sin, cos, exp stetig

- $f: I \to \mathbb{R}$ stetig und monoton; f^{-1} im selben Sinn monoton $\Rightarrow f^{-1}$ stetig

Differentiation

- f heißt in x_0 diffbar, wenn $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \Delta f_{,x_0}(x)$ nach x_0 stetig fortgesetzt werden kann: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} =: f'(x_0)$
- f diffbar: in jedem $x_0 \in I$ diffbar; f diffbar $\Rightarrow f$ stetig

Rechenregeln: $(a \cdot x^n)' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$ $\quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$ $\quad (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$(f \cdot g)' = f'g + g'f$

$f'' > 0$: f konvex
$f'' < 0$: f konkav

- $\overbrace{(f^{-1})'}^{g'} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ $\quad (f^{-1})'' = \frac{-f''(g(y))}{(f'(g(y)))^3}$ $\quad$ (alternativ: $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$)

MWS: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diffbar; $\exists \xi \in (a,b)$: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ (Satz v. Rolle: $f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists \xi \in (a,b): f'(\xi) = 0$)

Funktionsfolgen:

- Konvergiert $f_n(x)$ $\forall x \in M$, dann heißt f_n punktweise konv. auf M; $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$
- f_n heißt gleichmäßig konvergent, wenn gilt $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$
- Sei f_n gleichmäßig konvergent mit Grenzwert f. Dann konvergiert f_n punktweise gegen f. Sind alle f_n in x_0 stetig, dann auch f (! Diffbarkeit wird nicht transportiert)
- Cauchy-Kriterium: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N: \|f_n - f_m\| < \varepsilon\ \forall n, m > N \to f$ konvergiert gleichmäßig auf M gegen $f = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$
- Majoranten-Kriterium: Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \|g_k\|$, dann konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)$ gleichmäßig

$\|f(x)\| = \sup\{|f(x)| : x \in M\}$

Eigenschaften: $\|f\| \geq 0$; $=$ bei $f = 0$

$\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$

Integration:

Treppenfkt.: - $t: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt ~, wenn es endlich viele Punkte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_r = b$ gibt, sodass t auf (x_{j-1}, x_j) mit $j = 1, \ldots, r$ konstant ist

- Verknüpfung von Treppenfkt. sind wieder Treppenfkt.

Elementarintegral: (für Treppenfkt.) $\int_a^b t(x)dx = \sum_{j=1}^{r} (x_j - x_{j-1}) \cdot t\left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right)$; es gilt: $\int (t_1 + t_2)\,dx = \int t_1\,dx + \int t_2\,dx$

$\int t_1 \leq \int t_2$ wenn $t_1 \leq t_2\ \forall x \in [a,b]$

$\min(b-a) \leq \int_a^b t(x)dx \leq (b-a) \cdot \max t(x)$

$\left|\int_a^b t(x)dx\right| \leq (b-a)\,\|t\|$

- ist t_n Folge von Trep.funktion mit $\lim_{n\to\infty} \|t_n\| = 0$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} \int_a^b t_n(x)\,dx = 0$

Regelfunktion: - f heißt ~, wenn es eine Folge von Treppenfkt. t_n gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert

$f \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists t_n : \|f - t\| < \varepsilon$

- $f \in \mathcal{R}$, beschränkt $\Rightarrow \|t_n\|$ beschränkt: $-(b-a)\sup\|t_n\| \leq \int t_n(x)dx \leq (b-a)\sup\|t_n\|$
- $f_n \in \mathcal{R}$; $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\|f_n - f\| \to 0$; dann ist $f \in \mathcal{R}[a,b] \Rightarrow \int f\,dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n\,dx$

Regelintegral: - $\int (f+g)\,dx = \int f\,dx + \int g\,dx$

$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$

$\int f(x)dx \leq \int g(x)dx$ wenn gilt: $f(x) \leq g(x)\ \forall x$

- Hauptsatz: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig; $c_1 = \sup f(x)$, $c_2 = \inf f(x)$: $c_2 \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq c_1(b-a)$
  - $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ diffbar auf (a,b) mit $F'(x) = f(x)$ $\quad F =$ Stammfunktion
  - $\int_a^b F'(x)dx = F|_a^b$
- MWS: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig: $\exists \xi \in [a,b]$: $\int_a^b f(x)dx = (b-a)\,f(\xi)$

Folgen/Reihen: - Sei $g_n \in \mathcal{R}[a,b]$ und $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)$ gleichmäßig konv. auf $[a,b]$, dann gilt: $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b g_n(x)dx$

- Bei Potenzreihe: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergiere für $|x| < r$: $\forall |c| < r$: $\int_0^c f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \int_0^c x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n \cdot c^{n+1}}{n+1}$

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ist Stammfkt. zu f

für $|x| < r$ ist f auch diffbar und $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot n \cdot x^{n-1}$

Techniken: (i) partielle Integration: $\int_a^b f' \cdot g(x)dx = f(x) \cdot g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x) g'(x)\,dx$

(ii) Substitution: $\int f(x)dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$

Approximation durch Polynome

Lagrange: Gegeben seien $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$; $y_0 \ldots y_n \in \mathbb{R}$. $\exists$ genau ein Polynom mit Grad $\leq n$ und $p(x_j) = y_j$

Weierstraß: $a < b \in \mathbb{R}$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varepsilon > 0$ $\exists$ genau ein Polynom mit $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ $\forall a \leq x \leq b$

Taylorpolynom: - $T_{f,x_0}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$ (bei Potenzreihe: $\sum_{n=0}^{N} a_n x^n \hat{=}$ N-te Taylorpolynom; jedes Polynom vom Grad $n \hat{=} T_{p,x_0} = \sum_{j=0}^{n} \ldots$)

- Sei $T(x) = T_{f,x_0}$. Dann gilt $\forall x \in I$: $f(x) = T(x) + \underbrace{\frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt}_{\text{Fehler}}$
- f^{∞} oft diffbar; $\lim_{n\to\infty} T_{f,x_0}$ kann formal gebildet werden, ist i.A. aber nicht f (Ausnahme: sin, cos, exp)

Lineare Algebra: **Vektoren:** $(\underline{a}+\underline{b})+\underline{c}=\underline{a}+(\underline{b}+\underline{c})$; $\underline{a}+\underline{b}=\underline{b}+\underline{a}$; $\underline{a}+\underline{a}=2\underline{a}$

$(\lambda+\mu)\underline{x}=\lambda\underline{x}+\mu\underline{x}$; $(\lambda\cdot\mu)\cdot\underline{x}=\lambda\cdot(\mu\cdot\underline{x})$; $\lambda(\underline{x}+\underline{y})=\lambda\underline{x}+\lambda\underline{y}$

Gerade: $v_1,v_2\in\mathbb{R}^n$. Es gibt genau eine Gerade G mit $\underline{v}_1,\underline{v}_2\in G$: $G=\underline{v}_1+\mathbb{R}\cdot(\underline{v}_2-\underline{v}_1)$; im $\mathbb{R}^2$: $a x_1+b x_2=c$ $G \hat{=}$ Lsg-Menge dieser Gleichung

Skalarprodukt: $<\underline{x},\underline{y}>=x_1y_1+\dots+x_ny_n$

$<\underline{x}+\underline{y},\underline{z}>=<\underline{x},\underline{z}>+<\underline{y},\underline{z}>$; $<\underline{x},\underline{y}-\underline{z}>=-<\underline{x},\underline{z}-\underline{y}>$

$<\underline{x},\underline{y}>=<\underline{y},\underline{x}>$; $<\lambda\cdot\underline{x},\underline{y}>=\lambda\cdot<\underline{x},\underline{y}>$

$<\underline{x},\underline{x}>\geq 0$ ($=$ wenn $\underline{x}=\underline{0}$)

Länge eines Vektors: $\sqrt{<\underline{x},\underline{x}>}=\|\underline{x}\|\geq 0$ ($=$ wenn $\underline{x}=\underline{0}$) $|\sin x|\leq|x|$

$\|\lambda\cdot\underline{x}\|=|\lambda|\cdot\|\underline{x}\|$

$|<\underline{x},\underline{y}>|\leq\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|$ ($=$ wenn gilt: $\lambda\underline{x}=\mu\cdot\underline{y}$) ... Cauchy-Schwarz-Ungleichung $|x\cdot y|^2\leq|x|^2\cdot|y|^2$

$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2=<\underline{x}+\underline{y},\underline{x}+\underline{y}>=\|\underline{x}\|^2+\|\underline{y}\|^2+2<\underline{x},\underline{y}>$ ... Satz von Pythagoras $\frac{\sin^2(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{|x+y|^2}{\sqrt{}}$

$\|\underline{x}+\underline{y}\|^2+\|\underline{x}-\underline{y}\|^2=2\|\underline{x}\|^2+2\|\underline{y}\|^2$ ... Parallelogrammgleichung $\leq\frac{2(x^2+y^2)}{\sqrt{}}$

$\|\underline{x}+\underline{y}\|\leq\|\underline{x}\|+\|\underline{y}\|$ ... Δ-Ungleichung

Winkel: $\cos\varphi=\frac{<\underline{x},\underline{y}>}{|\underline{x}|\cdot|\underline{y}|}$ $\rightarrow$ $<\underline{x},\underline{y}>=0\Rightarrow\underline{x}\perp\underline{y}$

~~Abstand~~

HNF: $a_1x_1+a_2x_2=b$; $b\geq 0$, $\|a_1,a_2\|\neq 0$ $\Rightarrow$ $\frac{a_1}{\|a_1,a_2\|}x_1+\frac{a_2}{\|a_1,a_2\|}x_2=\underbrace{\frac{b}{\|a_1,a_2\|}}_{\text{Abstand zu }\underline{0}}$

Ebenen: $E=\{\underline{v}_0+\lambda_1\underline{w}_1+\lambda_2\underline{w}_2\}$ w_1,w_2 linear unabhängig!

im $\mathbb{R}^3$: Ebene ist Lsg.-Menge von $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=c$

Vektorprodukt: $\underline{x}\times\underline{y}=\begin{pmatrix}x_2y_3-x_3y_2\\x_3y_1-x_1y_3\\x_1y_2-x_2y_1\end{pmatrix}\perp\underline{x},\underline{y}$

$\underline{x}\times\underline{y}=-\underline{y}\times\underline{x}$ $(\lambda\underline{x})\times\underline{y}=\lambda(\underline{x}\times\underline{y})=\underline{x}\times(\lambda\underline{y})$

$\underline{v}\times\underline{v}=0$ $\forall\underline{v}\in\mathbb{R}^3$

$(\underline{x}+\underline{y})\times\underline{z}=\underline{x}\times\underline{z}+\underline{y}\times\underline{z}$ $<\underline{x}\times\underline{y},\underline{x}>=<\underline{x}\times\underline{y},\underline{y}>=0$

$\|\underline{x}\times\underline{y}\|=\|\underline{x}\|\cdot\|\underline{y}\|\cdot\sin\varphi$ $\varphi\dots\measuredangle(\underline{x},\underline{y})$

Matrizen:
- $(a_{ij})+(b_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$
- $\lambda(a_{ij})=(\lambda\cdot a_{ij})$ $A\cdot B=(<a_i,b_j>)$ i... Zeile ; j... Spalte
- $A(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$ aber: $A\cdot B\neq B\cdot A$ (i. A.)
- Elementare Zeilenoperationen: (1) Vertauschen v. Zeilen (2) Addition v. Zeilen (3) Multiplikation mit Skalar

Elementarmatrizen: $R_{ij}=\begin{pmatrix}1 & \alpha_{ij}\\0 & 1\end{pmatrix}$ $S_{ij}=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & \alpha\ 1\end{pmatrix}$ $T_{ij}=\begin{pmatrix}1 & & \\ & a_{ii}\dots 1_{ij} & \\ & 1_{ji}\dots 0_{jj} & \\ & & 1\end{pmatrix}$

$R_{ij}(\alpha)\cdot A$... addiert das α-fache d. j-ten Zeile zur i-ten

$S_{ij}(\alpha)\cdot A$... multipliziert i-te Zeile von A mit α

$T_{ij}\cdot A$... vertauscht i-te Zeile mit j-ter Zeile

- **Lineare Abbildung:** $\varphi: K^s\to K^r$

(1) $\varphi(\underline{x}+\underline{y})=\varphi(\underline{x})+\varphi(\underline{y})$

(2) $\varphi(\lambda\cdot\underline{x})=\lambda\cdot\varphi(\underline{x})$

Matrix zu φ: $v_1,\dots,v_s$ Basis

$A=(\varphi(v_1)\dots\varphi(v_s))$

$\varphi_A: K^s\to K^r \Longleftrightarrow \underline{x}\to A\underline{x}$

$M_A^B(\varphi^{-1})=M_B^A(\varphi)^{-1}$

Die Spalten von $M_A^B(\varphi)$ sind die durch φ abgebildeten und durch B ausgedrückten Basisvektoren von A!

- **Vektorraum:** Abelsche Gruppe (mit $+$ und 0 = neutrales Element) heißt VR, wenn zusätzlich Skalarmultiplikation gegeben ist:

$$\left.\begin{array}{l}\text{(i) } (\lambda\cdot\mu)\underline{v}=\lambda\cdot(\mu\cdot\underline{v})\\ \text{(ii) } (\lambda+\mu)\underline{v}=\lambda\underline{v}+\mu\underline{v}\\ \text{(iii) } \lambda(\underline{v}+\underline{w})=\lambda\underline{v}+\lambda\underline{w}\\ \text{(iv) } 1\cdot\underline{v}=\underline{v}\end{array}\right\}\ \forall\lambda,\mu\in K,\ v,w\in V$$

UVR: V sei K-VR und $W\subset V$ mit Verknüpfung auf V ein K-VR, dann heißt W UVR:

(i) $\forall v,w\in W\Rightarrow v+w\in W$

(ii) $\forall v\in W,\ \lambda\in K\Rightarrow\lambda\cdot v\in W$

- **Kern & Bild:** V,W K-VR, $\varphi: V\to W$ linear:
  - $\text{Kern}(\varphi)=\{v\in V:\varphi(v)=0\}$
  - $\text{Bild}(\varphi)=\{\varphi(v);v\in V\}=\varphi(V)$
- **Isomorphismus:** bijektive, lineare Abbildung

Lineare Abhängigkeit: $\lambda_1v_1+\dots+\lambda_rv_r=0\Rightarrow\lambda_1=\dots=\lambda_r=0$ (linear unabhängig)

Lineare Hülle: $B\subset V$ beliebig: $\sim$ ist kleinster UVR, der B enthält

$W=\{\sum_{j=1}^{r}\lambda_jb_j\ ;\ r\in\mathbb{N},\lambda_j\in K,b_j\in B\}$

ist $B\subset V$ so, dass lineare Hülle ganz V ergibt $\rightarrow$ Erzeugendensystem

Basis: := linear unabh. Erzeugendensystem
- jeder VR hat Basis
- B_1,B_2 Basen: $\exists$ Bijektion: $B_1\Rightarrow B_2$
- $\# B=\dim V$

- **Direkte Summe**: V, W sind UVR d. K-VR's U, sodass jedes $u \in U$ genau eine Darstellung $u = v + w$ mit $v \in V, w \in W$, dann $U = V \oplus W$
  (Basen von V und W vereinigen sich zu Basis von U) $\varphi: U \to V$; $u + w \mapsto v$; $\varphi \circ \varphi = \varphi$
- **Projektion**: Eine lineare Abb. eines K-VR's U, z.B. $\varphi: U \to U$ mit $\varphi \circ \varphi = \varphi$ heißt ~. $V = \varphi(U)$; $W = \mathrm{Kern}(\varphi)$
  (EW: 0, 1)
- **Darstellende Matrix**: V VR mit Basis $e_1, \dots, e_s$ und $\chi_V = V \to K^s$, W VR mit Basis $f_1, \dots, f_r$ und $\chi_W: W \to K^r$
  $\varphi: V \to W$ linear:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\chi_V"'] & W \arrow[d, "\chi_W"] \\ K^s \arrow[r, "\chi_W \varphi \chi_V^{-1}"'] & K^r \end{tikzcd}$$

  A berechnen: $\varphi(e_j) = a_{1j} f_1 + \dots + a_{rj} f_r$ $A = (a_{ij})$

- **Basisergänzungssatz**: V sei K-VR; $L \subset V$ linear unabh. Teilmenge. Dann hat V eine Basis B und $L \subset B$
- **Dimensionsformel**: V sei endl.-dim. K-VR, W sei K-VR, $\varphi: V \to W$ linear $\Rightarrow \dim V = \dim \mathrm{Kern}(\varphi) + \dim \underbrace{\varphi(V)}_{\text{Bild}}$

$\dim \mathrm{Kern} \hat{=}$ freie Var.
$\dim \mathrm{Bild} \hat{=} \mathrm{Rang}\, A$

- **Endomorphismus**: lineare Abb. $\varphi: V \to V$ heißt Endomorphismus
- **Determinante**: $\det(a) = a$
  $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
  $\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
  $\det A \cdot B = \det A \cdot \det B$
  $\det A = \det {}^t A$
  $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_i + \lambda a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda \cdot \det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad \det\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

- Beim Vertauschen zweier Zeilen ändert Determinante Vorzeichen
- Multipliziert man Zeile mit α, so multipl. sich auch Determ.
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu anderer Zeile ändert Det. nicht
- $\det \alpha \cdot A^{n \times n} = \alpha^n \det A$

- **Diagonalisierung**: $S^{-1} A S = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow \exists$ Basis aus EV $\Leftrightarrow \exists\, n$ verschiedene EW $\Leftrightarrow \dim \mathrm{Eig}(\lambda) =$ Vielfachheit von λ
- **EW & EV**: $A \cdot v = \lambda \cdot v$
  Bestimmung d. EW: Nullstellen von $P_\lambda = A - \lambda E$ $S = (v_1, \dots, v_n)$ $P_A(A) = 0$
  EV: $(A - \lambda E) = 0$
- **Trigonalisierung**: $J(r, \lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$; $(J(r,\lambda))^s = \begin{pmatrix} \lambda^s & s\lambda^{s-1} & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^s \end{pmatrix}$ ~~Binomialkoeffizient~~ $s =$ Binomialkoeff.
  Bsp. $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 3a^2 & 3a \\ 0 & a^3 & 3a^2 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$
  Transformation: Bestimmung d. Hauptvektoren: (i) $(A - \lambda E)^k = 0$ Hauptraum: $\bigcup_{s=1}^{\infty} \mathrm{Kern}(\varphi - \lambda \mathrm{id})^s = H(\lambda)$
  oder (ii) $(A - \lambda E) w = v$
- $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$; gilt $A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$
  $\exp\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$
- $\|A\| = \sqrt{\sum |a_{ij}|^2}$
- $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k$ mit Konvergenzradius r; $\|A\| < r \Rightarrow f(A)$ konvergiert in jedem Eintrag absolut; $\boxed{f(S^{-1}AS) = S^{-1} f(A) S}$
- $A = \left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline 0 & C \end{array}\right) \Rightarrow A^n = \left(\begin{array}{c|c} B^n & 0 \\ \hline 0 & C^n \end{array}\right)$, $\exp A = \left(\begin{array}{c|c} \exp(B) & 0 \\ \hline 0 & \exp(C) \end{array}\right)$
- **DGL**: $y' = A \cdot y$ ... lineares homogenes DGL
  (i) A diagonalisierbar: $y(t) = \exp(EW \cdot t) \cdot EV$
  (ii) A trigonalisieren: $J = S^{-1} A S \Rightarrow \exp(t \cdot A) = \exp(t \cdot S J S^{-1}) = S \cdot \exp(tJ) S^{-1}$ $\exp(tJ) = e^{t\lambda}\begin{pmatrix} 1 & t & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}$
  $\boxed{\exp(J) = \exp(\lambda J)}$ $t < 1$
- **Skalarprodukt**: $v, w \to \langle v, w \rangle$ heißt ~, wenn gilt:
  (i) $\forall w \in V$: $v \to \langle v, w \rangle$ linear
  (ii) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$
  (iii) $\langle v, v \rangle \geq 0$ ($=$ bei $v = 0$)
  Alternativ: A ist Skalarprodukt wenn gilt:
  A symmetrisch
  A positiv definit
- **Norm**: $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$
  Eigenschaften: $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
  $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
  $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$
  $|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$ ($=$ wenn v, w linear abh.) ... Cauchy-Schwarz
  $\|v \pm w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 \pm \langle v, w \rangle \pm \langle w, v \rangle$ ... Pythagoras
  $\|v + w\|^2 \leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2|\langle v, w \rangle|$ ... Δ-Ungleichung
  $\leq \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\|v\|\|w\| = (\|v\| + \|w\|)^2$
  $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2(\|v\|^2 + \|w\|^2)$
- $A = {}^t A$ (symmetr. Matrix)
  $\bar{A} = {}^t A$ (hermitsch)

alternativ: EV bilden ONB (wenn $\langle\,\rangle$ durch Matrix gegeben ist) $\to$ nur noch normieren

- **Bilinearform**: $b(x, y) = {}^t x A y$ $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- zu jeder symmetr. Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$ gibt es symmetr. Matrix A mit $b(x,y) = {}^t x A y$
- $v_1 \dots v_n$ Basis: $x = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$; $y = y_1 v_1 + \dots + y_n v_n$; dann gilt: $b(x,y) = {}^t x B y$ mit $B = (b(v_i, v_j))$
- ist $v_1^* \dots v_n^*$ weitere Basis und S Matrix d. Basiswechsels, dann gilt: $b(x) \; {}^t x B y = {}^t(S^{-1} x^*) B (S^{-1} x^*) = {}^t x^* ({}^t S^{-1} B S^{-1}) x^*$ ($x^* = Sx$)
  $B^* = {}^t S^{-1} B S^{-1}$ mit $B = (b(v_i^*, v_j^*))$
- **Orth./unitäre Gruppen**: $\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases}$
  Basis heißt orthogonal, wenn gilt: $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$
  - Jeder $\mathbb{R}$-VR mit $\langle\,\rangle$ hat ONB

Gram-Schmidt-Orthonormalisierung:
(i) wähle $v_1 \in V$ mit $\|v_1\| = 1$
(ii) wähle w linear unabh.
(iii) $w_1 = \langle w, v_1 \rangle \cdot v_1$
(iv) $v_2' = w - w_1$
(v) $v_2 = \frac{v_2'}{\|v_2'\|}$

- φ heißt orth./unitär, wenn gilt: $\langle v,w\rangle = \langle \varphi(v),\varphi(w)\rangle$
- Eine stetige Abb. heißt linear, wenn sie weder Längen noch Winkel verändert.
- Sei φ linear; φ orth./unitär $\Leftrightarrow \|v\| = \|\varphi(v)\| \ \forall v \in V$
- φ orth./unitär: (i) λ EW, dann $|\lambda| = 1$
  (ii) φ injektiv
  (iii) $\dim V < \infty$, dann $\exists\, \varphi^{-1}$ und φ^{-1} = orth./unitär
- $A \in K^{n\times n}$: A heißt orth./unitär, wenn gilt: ${}^{t}A = \bar{A}^{-1} \Leftrightarrow$ Zeilen/Spalten sind ONB
- Sei V $\mathbb{C}$-VR mit $\langle,\rangle$, φ unitär. Dann gibt es ONB aus EV von φ: $\exists$ Basis $v_1,\dots,v_n$, ONB, und darstellende Matrix von φ: $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ $|\lambda_j| =$
  Insbesondere ist φ diagonalisierbar: ist f_A^{AB} mit $A \in U(n)$: wählen $v_1,\dots,v_n$ ONB. $S = (v_1,\dots,v_n)$, ist unitär: ${}^{t}\bar{S} A S = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$
- $A \in O(2)$. Dann $\exists \alpha$ mit $A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$ oder $A = \begin{pmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{pmatrix}$; A hat 2 EW $\in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1 \Rightarrow \lambda = e^{i\alpha}$
- Sei φ orth.; $k = \dim \mathrm{Eig}(1)$, $l = \dim \mathrm{Eig}(-1)$. Dann gibt es ONB bzgl. derer φ durch Matrix mit $D_j \in O(2)$ gegeben ist: $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & D_1 & \\ & & & \ddots D_j \end{pmatrix}$

Gruppen: $O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orth.$\}$
$SO(n) = \{A \in V(n) ; \det A = 1\}$
$U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitär$\}$

$SO(n)$ heißen Drehungen. Bei $n=3$ wird Drehachse durch EV zum EW=1 angeg. Bei $\det A = -1$ enthält A auch Spiegelung

Selbstadjungierte Endomorphismen: $\langle v, \varphi(w)\rangle = \langle \varphi(v), w\rangle$

$\dim V = n$, $v_1 \dots v_n$ ONB: φ_A linear $\Rightarrow$ φ selbstadjungiert $\Leftrightarrow$ A symmetr./Hermitesch
$\Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R}$
$\Leftrightarrow$ ONB aus EV
$\Leftrightarrow \varphi$ diagonalisierbar

$\Rightarrow$ Selbstadj. Abb. können durch orth. Abb. diagonalisiert werden ($S \in O(n)/U(n)$: $\underset{{}^{t}\bar{S}}{\overset{\shortparallel}{S^{-1}}}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_n \end{pmatrix}$)

$\mathrm{Eig}(\lambda_1) \perp \mathrm{Eig}(\lambda_2)$

- φ_j selbstadj./orth./unitär: genau dann hat φ Basis aus EV für allen φ_j, wenn gilt: $\varphi_i \circ \varphi_j = \varphi_j \circ \varphi_i$

Sylvester'sches Trägheitsgesetz: $\cdot$ $b: V\times V \to K$ symmetr. Bilinearform. Zu jeder ONB $v_1 \dots v_n$ ist $(b(v_i,v_j))$ symmetr./Hermitesch; wird diagonal bei geeigneter Basis
$\cdot$ $v_1 \dots v_n$, $w_1 \dots w_n$ Basen. $(b(v_i,v_j))$ und $(b(w_i,w_j))$ haben selbe Anzahl $\left\{\begin{matrix}\text{posit.}\\ \text{negat.}\end{matrix}\right\}$ EW

Quadrik: ${}^{t}xAx + \langle b,x\rangle + c = 0$
Hauptachsentransformation $\to$ Techniken

Metr. Räume: $\|z\| = \sqrt{\langle z,z\rangle}$ „Abstand": $d(w,z) = \|z-w\|$
Es gilt: $d(z,w) = d(w,z)$
$d(z,w) = 0 \Leftrightarrow z = w$
$d(a,b) \leq d(a,c) + d(c,b)$

Konvergenz: a_k konvergiert gegen $a \Leftrightarrow \lim d(a_k,a) = 0$
Cauchy: v_k Cauchy $\cdot$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ mit $\|v_n - v_k\| < \varepsilon \ \forall n,k > N$
Hilbertraum: ist jede CF konvergent, dann ~.
Fourier-Reihe: $e_n(x) = e^{2\pi i n x} = \cos(2\pi n x) + i\sin(2\pi n x)$; $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{nm}$
$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(f)\, e_k(x)$ mit $a_k = \langle f, e_k\rangle$
Orthonormalsysteme in Hilbertraum V sind Folgen (e_n) mit $e_n \in V$ und $\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{nm}$
ONS heißt Hilbert-Basis, wenn $\forall v$ in der Form $v = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j e_j$ geschrieben werden kann.

Bessel'sche Ungleichung: V sei VR mit $\langle,\rangle$, e_n ein ONS. $\forall v \in V$: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle v, e_n\rangle|^2 \leq \|v\|^2$

Parseval'sche Gleichung: $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle v, e_n\rangle|^2 = \|v\|^2$ wenn V Hilbertraum und e_n Hilbertbasis

Stetigkeit: $\cdot$ $f: X \to Y$ heißt stetig in x, wenn $\forall x_n \in X$ mit $\lim x_n = x$ gilt: $\lim f(x_n) = f(x)$
- f ist stetig in x_0 genau dann, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$: $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$
- Stetigkeit bleibt bei Verkettung erhalten
- f heißt stetig, wenn in jedem Punkt stetig
- $f = (f_1,\dots,f_n)$ ist in x_0 stetig, wenn $\forall f_j$ in x_0 stetig
- Ist V mit d_1, d_2, d_∞ versehen. Dann ist $\int: V \to \mathbb{R}$: $f \to \int_0^1 f(x)dx$ stetig

$d_1: \|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$
$d_2: \|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}$
$d_\infty: \|f\|_\infty = \max_{0\leq x\leq 1} |f|$

Topologie: M sei metr. Raum; $U_\varepsilon(m) = \{x \in M : d(x,m) < \varepsilon\}$; M heißt offen, wenn $\forall m \in U\ \exists \varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(m) \subset U$.
- $A \subset M$ heißt abgeschlossen, wenn $M \setminus A$ offen ist.
- M heißt beschränkt, wenn $\exists R > 0$ mit $M \subset U_R(0)$
- Sei M abgeschlossen & beschränkt, f stetig: $\exists x_1, x_2$: $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\ \forall x \in M$
- Sei M abgeschlossen, $x_n \in M$ Folge, die in $\mathbb{R}^n$ Grenzwert x_0 hat. Dann $x_0 \in M$. $[M \in \mathbb{R}^n]$
- M heißt vollständig, wenn jede CF konvergiert
- X sei vollständig metr. Raum; $M \subset X$ heißt kompakt, wenn es zu jeder Folge $x_n \in M$ eine Teilfolge gibt, die konv. & Grenzwert $\in M$
- M kompakt, wenn M abgeschl. & beschränkt ist
- $M \subset X$ kompakte Teilmenge eines vollst. metr. Raums $X \Rightarrow M$ abgeschlossen & beschränkt (Umkehrung falsch!)
- Fkt. nach $\mathbb{R}$ nehmen auf kompakten Mengen Min/Max an.

BFPS: • Kontraktion: $d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq q \cdot d(x,y)$ $\quad 0<q<1$

• M vollst. metr. Raum ; eine Kontraktion $\varphi: M \to M$ besitzt genau einen Fixpunkt
(Folge, die durch $a_{n+1} = f(a_n)$ gegeben ist, konvergiert)

Fehlerschätzung: (1) $d(x^*, x_k) \leq \dfrac{q^k}{1-q} d(x_0, x_1)$ (2) $d(x^*, x_k) \leq \dfrac{1}{1-q} \cdot d(x_{k+1}, x_k)$

~~$d(x^*, x_k) \leq \frac{q^{k}}{1-q} d(x_k, x_{k+1})$~~ (3) $d(x^*, x_k) \leq \dfrac{q}{1-q} \cdot d(x_k, x_{k-1})$

Differentialrechnung im $\mathbb{R}^n$:

partielle Ableitung: $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$

Richtungsableitung: $\|v\| = 1$: $\partial_v F(x_0) = \dfrac{\partial}{\partial t} F(x_0 + t \cdot v)\big|_{t=0}$; $\partial_v F(x_0) = \sum_{j=1}^{n} v_j \dfrac{\partial F}{\partial x_j}(x_0) = \operatorname{grad} f \dfrac{v}{\|v\|}$

Gradient: $\operatorname{grad} f = \nabla f = \left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right)$

bzw. $J_f = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \nabla f_2 \\ \nabla f_n \end{pmatrix}$ ... Jacobi-Matrix

grad $\perp$ Niveaulinie
grad $\hat{=}$ Richtung d. größten Steigung ;

Diffbarkeit: Ist f stetig, partiell diffbar, exist. alle $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ und sind diese in x_0 stetig $\to$ f in x_0 stetig
ist f diffbar, dann $J_f = f'$

$$H_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

Extremwerte: $J_f = 0$ => Kandidaten f. Extremum
↳ in H einsetzen, auf Definitheit prüfen

Taylorpolynome: $T_{f,n} =$ ~~[illegible]~~ $\frac{1}{1!} f(x_0) + \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x - x_1) + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}(x - x_2) + \frac{1}{2!}(\dots)$

MWS: Sei $G \subset \mathbb{R}^n$, $F: G \to \mathbb{R}$ diffbar in G, $\underline{a}, \underline{x} \in G$; Verbindungsgerade $g = \{\underline{a} + t(\underline{x} - \underline{a}), 0 \leq t \leq 1\} \subset G$.
Dann gibt es $\xi \in g$ mit $F(\underline{x}) - F(\underline{a}) = \nabla F(\xi)(\underline{x} - \underline{a})$

Implizite Fkt.: • $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ Gebiet, Pkt. im $\mathbb{R}^{n+1}$ seien $(\underline{x}, y) = (x_1, \dots, x_n, y)$. $F: G \to \mathbb{R}$ stetig und nach y partiell stetig diffbar.
Ist $\dfrac{\partial F}{\partial y} \neq 0$, dann kann F nach y aufgelöst werden. $y = g(\underline{x})$

$$\frac{\partial g}{\partial x_j}(\underline{x}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_j}(\underline{x}, g(\underline{x}))}{\frac{\partial F}{\partial y}(\underline{x}, g(\underline{x}))}$$

• Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+k}$ offen, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^k$ und $F: G \to \mathbb{R}^k$ stetig diffbar. Schreibe $F = (F_1, \dots, F_k)$
und $\mathcal{L} = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in G : F_1(\underline{x}, \underline{y}) = \dots = F_k(\underline{x}, \underline{y}) = 0\}$. Sei $(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \in \mathcal{L}$ und $\left(\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \right)_{1 \leq i,j \leq k}$
invertierbar. Dann kann F nach $\underline{y}$ aufgelöst werden. $g(\underline{x}_0) = \underline{y}_0$.
g ist diffbar mit $J_g(\underline{x}_0) = \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial y_j}(\underline{x}_0, \underline{y}_0) \right)^{-1}_{1 \leq i,j \leq k} \left(\dfrac{\partial F_i}{\partial x_j}(\underline{x}_0, g(\underline{x}_0)) \right)_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq n}}$

~~[illegible]~~ Kurven, Flächen, Mannigfaltigkeiten:

Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $L_d = \{(x_1, \dots, x_n) : x_{d+1} = \dots = x_n = 0\}$
• eine d-dim. Karte in der Nähe von $m \in M$ ist stetig diffbare Abb. $\varphi: U_\varepsilon(\underline{0}) \to \mathbb{R}^n$
mit folgenden Eigenschaften: (i) $\varphi: U_\varepsilon(\underline{0}) \to \varphi(U_\varepsilon(\underline{0}))$ ist bijektiv, $\det J_\varphi(\underline{x}) \neq 0 \ \forall \underline{x} \in U_\varepsilon(\underline{0})$
(ii) $\varphi(\underline{0}) = \underline{m}$
(iii) $M \cap \varphi(U_\varepsilon(\underline{0})) = \varphi(L_d \cap U_\varepsilon(\underline{0}))$

• M heißt d-dim. Mannigfaltigkeit d. $\mathbb{R}^n$, wenn es zu jedem $m \in M$ eine d-dim. Karte gibt (in d. Nähe v. $\underline{m}$)
• Ein Atlas einer solchen d-dim. Mannigfaltigkeit ist eine Menge solcher Karten, s.d. jedes $m \in M$ im Bild mind. einer Karte vorkommt

Tangential- & Normalenraum:

• Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ d-dim. Mannigfaltigkeit, $\underline{m} \in M$. $v \in \mathbb{R}^n$ heißt Tangentialvektor an M in $\underline{m}$, wenn es einen
diffbaren Weg $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ mit $\gamma(0) = m$, $\gamma'(0) = v$ gibt.
• $T_m M = \{$Tangentialvektoren in $m\}$ ist $\mathbb{R}$-VR, dim $= d$

Tangentialebene ist linearer Anteil d. Taylorentwicklung

• $N_m M = (T_m M)^\perp = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \underline{x}, v \rangle = 0 \ \forall v \in T_m M\}$
• Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F_1 \dots F_k: G \to \mathbb{R}$ stetig diffbar, $\underline{m} \in \mathcal{L} = \{F_1(\underline{x}) = \dots = F_k(\underline{x}) = 0\}$.
In $\underline{m}$ habe $J_{(F_1 \dots F_k)}$ Rang k. Dann ist $T_m \mathcal{L} = \{\underline{v} : J_{(F_1 \dots F_k)}(\underline{m}) \underline{v} = 0\}$
• $\mathbb{R}^n$, d-dim. Mannigfaltigkeit sei gegeben durch $k = n-d$ diffbare Gleichungen $F_1(\underline{x}) = \dots = F_k(\underline{x}) = 0$, für $F = (F_1 \dots F_k)$
habe $J_F(x)$ stets Rang k. Dann gilt $\forall \underline{m} \in M$: $T_{\underline{m}} M = \operatorname{Kern} F'(m) = \{\underline{v} \in \mathbb{R}^n : J_F(\underline{m}) \cdot \underline{v} = \underline{0}\}$
• Sei $f: M \to \mathbb{R}$ Fkt., $\underline{m} \in M$ (wie oben). Sei φ Karte mit $\varphi(\underline{0}) = \underline{m}$. $\mathcal{L}_d = \{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{d+1} = \dots = x_n = 0\}$
f heißt stetig / diffbar / stetig diffbar, wenn gilt: $f \circ \varphi: U_\varepsilon(\underline{0}) \to \mathbb{R}$; gilt für jede Karte diese Eigenschaften, dann auch f. f

Lagrange'sche Multiplikatorenregel: f Fkt., $g_k(\underline{x}) = 0$ Nebenbedingung: $L(x, \lambda) = f + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k g_k$; $\dfrac{\partial}{\partial x_i} L = 0$ & $\dfrac{\partial}{\partial \lambda_i} L = 0$

Mehrdim. Integrale: Quader $Q = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : a_i < x_i < b_i \}$ mit $\underline{a}, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$; $a_i < b_i$

Treppenfkt.: Q Quader, $t: Q \to \mathbb{R}$. t heißt so, wenn es endl. viele $Q_j \subset Q$ mit $\bigcup Q_j = Q$ gibt, so dass t auf Q_j konst. ist.
Elementarintegral ist definiert durch $\int_Q t \, d\underline{x} = \sum \mathrm{vol}(Q_j) \cdot t(Q_j)$

Eigenschaften: (i) $\mathcal{T}(Q) = \{ t: Q \to \mathbb{R} \text{ Treppenfkt.} \}$ ist $\mathbb{R}$-VR und $\int : \mathcal{T}(Q) \to \mathbb{R} : t \mapsto \int_Q t \, d\underline{x}$ ist linear.
(ii) $t_1, t_2 \in \mathcal{T}(Q)$: $\max/\min(t_1, t_2) \in \mathcal{T}(Q)$
(iii) $t_1(\underline{x}) \leq t_2(\underline{x}) \; \forall \underline{x} \in Q \Rightarrow \int_Q t_1 \leq \int_Q t_2$

Regelfkt.: $f: Q \to \mathbb{R}$ heißt so, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists t \in \mathcal{T}(Q)$ mit $\| f - t \|_\infty < \varepsilon$
ist Q abgeschl. Quader und $f: Q \to \mathbb{R}$ stetig, dann ist f Regelfkt.

Regelintegral: f Regelfkt. Dann gibt es Treppenfkt. t_k mit $\lim_{k \to \infty} \| f - t_k \|_\infty = 0 \Rightarrow t_k$ ist CF bzgl. $\| \, \|_\infty$
$\Rightarrow \left| \int t_k \, dx - \int t_l \, dx \right| < \varepsilon \, \mathrm{vol}(Q)$
- Q sei abgeschl. Quader. $\mathcal{R}(Q) = \{ f: Q \to \mathbb{R} \text{ Regelfkt.} \}$. Dann ist $\mathcal{R}(Q)$ $\mathbb{R}$-VR, $\int : \mathcal{R}(Q) \to \mathbb{R} : f \mapsto \int_Q f \, d\underline{x}$ ist linear & monoton.
(i) $f, g \in \mathcal{R}(Q)$ mit $f(\underline{x}) \leq g(\underline{x}) \; \forall \underline{x} \in Q \Rightarrow \int_Q f \, dx \leq \int_Q g(x) \, dx$
(ii) $f \in \mathcal{R}(Q) \Rightarrow |f| \in \mathcal{R}(Q)$ und es gilt: $\left| \int_Q f \, dx \right| \leq \int_Q |f| \, dx$

~~$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \{0 < \|x\| \leq 1\}} \|\underline{x}\|_\infty^{-\alpha} \, d\underline{x}$ ex. genau für $\alpha > n$; für $\alpha \leq n$ ist $\int$ in ∞ nicht beschränkt~~

[**Punktsingularität:** - $f: G \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$; $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $x_0 \in G$ (Punktsingularität). Annahme: $x_0 = 0$ (sonst Substitution: $x \mapsto x - x_0$)
$f \in \mathcal{R}(Q)$ für jeden abgeschlossenen Quader $Q \subset G \setminus \{x_0\}$
Integration über Punktsingularität in $\underline{0}$ ~~kann~~ f kann mit Transformationsformel und $\underline{y} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|^2}$ auf uneigentl. Integrale über $\mathbb{R}^n$ zurückgeführt werden.
- Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $0 \in G$, $f: G \setminus \{\underline{0}\} \to \mathbb{R}$ sei in $\mathcal{R}(Q)$ für jeden abgeschl. Quader $Q \subset G \setminus \{0\}$. f ist uneigentl. intbar über G, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$, s.d. für jede kompakte Menge $K \subset \{ 0 < \|\underline{x}\| \leq \delta \}$ gilt: $\left| \int_K f \, d\underline{x} \right| < \varepsilon$
Wegen Transf.-Formel ~~[illegible]~~ gelten Majorantenkriterium und Fubini auch für diese uneigentl. Integrale
- Ist $\| \cdot \|_{1/2,\infty}$ auf $\mathbb{R}^n$, dann ex. $\int_{\|x\| \leq 1} \|\underline{x}\|^{-\alpha} \, d\underline{x}$ genau für $\alpha < n$
- $f: \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ und ex. $\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_n) \, dx_1 \dots dx_n$, dann ex. auch $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\underline{x}$]

Integration über allg. Mengen:
- $Q \subset \mathbb{R}^n$ Quader, $G \subset Q$ beliebig ; $\mathbb{1}_G(\underline{x}) = \begin{cases} 1 & x \in G \\ 0 & x \notin G \end{cases}$
G heißt $(\mathbb{R}\text{-})$messbar, wenn $\mathbb{1}_G \in \mathcal{R}(Q)$
- $\mathrm{vol}(G) := \int_Q \mathbb{1}_G \, d\underline{x}$ heißt Volumen von G
- $f \in \mathcal{R}(Q)$ und G messbar, $G \subset Q$, dann ist $\mathbb{1}_G f \in \mathcal{R}(G)$

$$\int_Q \mathbb{1}_G \cdot f \, d\underline{x} =: \int_G f \, d\underline{x}$$

- Messbar sind Mengen $G \subset \mathbb{R}^n$, wenn $\exists$ Quader Q mit $G \subset Q$ und der Rand ∂G von G aus endl. vielen Mannigfaltigkeiten besteht: $\partial G : g \in \partial G \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; U_\varepsilon(g) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - g\| < \varepsilon \}$ (sowohl Pkt. in G als auch in $\mathbb{R} \setminus G$)
(insbesondere sind die durch diffbare Gleichungen beschriebene Mengen messbar)

Sukzessive Integration: **Fubini:** $\int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{a_1}^{b_1} \dots \int_{a_n}^{b_n} f(\underline{x}) \, dx_n \dots dx_1$
- Sei $t \in \mathcal{T}(Q)$. Dann ist $t'(x') = \int_{a_n}^{b_n} t(\underline{x}) \, dx_n \in \mathcal{T}(Q')$
- Sei $f \in \mathcal{R}(Q)$. Dann ist $F(\underline{x}') = \int_{a_n}^{b_n} f(\underline{x}) \, dx_n \in \mathcal{R}(Q')$
- $\int_Q f(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{Q'} \int_{a_n}^{b_n} f(\underline{x}', x_n) \, dx_n \, d\underline{x}'$

Transformationsformel: $\int_{\Phi(T)} f(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_T f(\Phi(t)) \cdot |\det J_\Phi(t)| \, d\underline{t}$

Parameterintegral: $F(\underline{y}) = \int_Q f(\underline{x}, \underline{y})$ $\quad \frac{\partial F}{\partial y_j} = \int_Q \frac{\partial f}{\partial y_j} \, d\underline{x}$ (Vorr.: $\underline{x} \mapsto f(\underline{x}, \underline{y})$ stetig, $\underline{y} \mapsto f(\underline{x}, \underline{y})$ stetig. Es gebe $c \in \mathbb{R}$ mit $|f(x, y)| \leq c$)

Uneigentliche Integrale: - $Q_N = \{ \underline{x} : |x_j| \leq N \; (1 \leq j \leq n) \}$
Sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Regelfkt. auf jedem abg. Quader. f heißt uneigentl. intbar über $\mathbb{R}^n$, wenn $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$, s.d. für jede kompakte messbare Menge K mit $K \cap Q_N = \emptyset$ gilt: $\left| \int_K f \, d\underline{x} \right| < \varepsilon$. Dann ex. $\lim_{N \to \infty} \int_{Q_N} f(\underline{x}) \, d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}^n} f(\underline{x}) \, d\underline{x}$
- Spezialfall: f wie vorher, aber mit $f(\underline{x}) \geq 0$: dann ist $\int_{Q_N} f \, d\underline{x}$ monoton wachsend, dann ex. $\sup_N \int_{Q_N} f \, d\underline{x} = \int_{\mathbb{R}} f \, d\underline{x}$
- **Majorantenkriterium:** $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, beide $\in \mathcal{R}(Q)$ auf jedem Quader, $|g| \leq |f|$, und das $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\underline{x}$ ex.
Dann ex. $\int_{\mathbb{R}^n} g \, d\underline{x}$, und: $\left| \int g \, d\underline{x} \right| \leq \int |g| \, dx \leq \int f \, d\underline{x}$

Lebesgue-Integral: • **Nullmenge:** $E \subset \mathbb{R}^n$ heißt ~, wenn $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ eine Folge von Quadern $Q_j \subset \mathbb{R}^n$ mit $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{vol}(Q_j) < \varepsilon$ (Bsp. abzählbare Mengen, $\mathbb{Q}$ Nullmenge in $\mathbb{R}$, Geraden in $\mathbb{R}^n$, Mfkt. in $\mathbb{R}^n$ mit $\dim \leq n-1$)

• $t_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ~~Treppenfkt~~ mit $t_k \leq t_{k+1}\ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Es gebe $A \in \mathbb{R}$ mit $\int t_k\, dx \leq A$. Dann ex. $\lim_{k\to\infty} t_k\ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer Nullmenge.

• $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt L_1-intbar, wenn es Folgen von Treppenfkt. $t_k \in \mathcal{J}^{(n)}$ mit $t_k \leq t_{k+1}\ \forall k$ gibt, $\int t_k\, dx \leq A$ und $\lim_{k\to\infty} t_k(x) = f(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n$. Man setzt dann $\int f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int t_k\, dx$.

• f heißt Lebesgue-intbar, wenn $f = g - h$ mit L_1-intbaren g, h, und es sei $\int f\,dx = \int g\,dx - \int h\,dx$.

Monotone Konvergenz: Seien f_k L-intbare Fkt mit $f_k \leq f_{k+1}\ \forall k \in \mathbb{N}, \underline{x} \in \mathbb{R}^n$. Es gebe A mit $\int f_k\, dx \leq A\ \forall k$.
Dann ist $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ existent $\forall x \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer Nullmenge.

$$f(\underline{x}) = \begin{cases} \lim_{k\to\infty} f_k(x) & \text{wenn ex.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist L-intbar und es gilt: $\lim_{k\to\infty} \int f_k\, d\underline{x} = \int f\, d\underline{x}$

• Ist f L-intbar, dann auch $|f|$.

Lebesgue'sch. Konvergenzsatz: Seien f_k L-intbare Fkt; es gebe $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ L-intbar; $|f_k(x)| \leq F(x)$; der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ ex. $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ außerhalb einer Nullmenge.
Dann ist auch $f(\underline{x}) = \begin{cases} \lim f_k(x) & \text{wenn ex.} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$ $\mathcal{L}$-intbar, und es gilt $\lim_{k\to\infty} \int f_k\,dx = \int f\,dx$

• Ist f Regel-intbar, dann auch $\mathcal{L}$-intbar, und Integrale stimmen überein.

Fubini-Tonelli: (i) Ist f L-intbar, dann $\int f\, d\underline{x} = \int \dots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \dots dx_n$ (*)
(ii) Ist $f: \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ und ex. rechte Seite von (*), dann ist f L-intbar und es gilt (*)

• $G \subset \mathbb{R}^k$ offen und $f: \mathbb{R}^n \times G \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:
(i) $\forall \underline{y} \in G$ sei $x \to f(\underline{x}, y_0) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$
(ii) in $y_0 \in G$ sei $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $y \to f(x,y)$ stetig
(iii) es gebe $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $|f(x,y)| \leq F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in G$

$\Rightarrow$ dann ist $g(x) = \int f(\underline{x}, \underline{y})\, d\underline{x}$ in y_0 stetig

• $G \subset \mathbb{R}$ Intervall, $f: \mathbb{R}^n \times G \to \mathbb{R}$ habe folgende Eigenschaften:
(i) $\forall y \in G$ ist $\underline{x} \to f(\underline{x}, y) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$
(ii) $\forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$ ist $y \to f(\underline{x}, y)$ nach y diffbar
(iii) $\forall y \in G$ ist $x \to \frac{\partial f}{\partial y} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$
(iv) Es gebe $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n)$ mit $\left|\frac{\partial f}{\partial y}(\underline{x}, y)\right| \leq F(\underline{x})\ \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n, y \in G$

$\Rightarrow$ dann ist $g(y) = \int f(\underline{x}, y)\, d\underline{x}$ diffbar auf G, und $g'(y) = \int \frac{\partial f}{\partial y}\, d\underline{x}$

• $\frac{\pi}{2} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2\cdot 2}{1\cdot 3}\right)\left(\frac{4\cdot 4}{3\cdot 5}\right)\left(\frac{6\cdot 6}{5\cdot 7}\right) \cdots \left(\frac{(2n-2)(2n-2)}{(2n-3)(2n-1)}\right)$

Klassische Parameterintegrale:

$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t}\, dt$ (für $0 < s < 1$ uneigentl. Integral bei 0, für $\forall s$ bei ∞)

$\Gamma(1) = 1$
$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s)$
$\Gamma(n) = (n-1)!$

$\Gamma'(s) = \int_0^{\infty} (\lg t)\, t^{s-1} e^{-t}\, dt$
$\Gamma''(s) = \int_0^{\infty} (\lg t)^2\, t^{s-1} e^{-t}\, dt > 0$

Für $s > 0$: $\Gamma(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^s \cdot n!}{s(s+1) \cdots (s+n)}$ → ~~Rest~~ Grenzwert ex. für $s \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, \dots\}$.
$s \cdot \Gamma(s) = \Gamma(s+1)$ kann für $-1 < s < 0$ als Def. für $\Gamma(s)$ genommen werden usw → Fortsetzung für $s < 0$
(Polstellen bei $\frac{1}{s+n}$ an negativen ganzen Zahlen $-n$)

Für $0 < s < 1$ gilt: $\Gamma(s) \cdot \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$

Beweis: $f(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi}$ $\quad g(s) = \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(1-s)}$

$f''(s) = -\pi^2 f(s)$
$g''(s) = -\pi^2 g(s)$ $\Rightarrow g = f \dots$

• $\frac{\sin \pi \cdot s}{\pi} = s \cdot \lim_{N\to\infty} \prod_{j=-N}^{N} \left(1 - \frac{s}{j}\right)$